LES LLEIS FONAMENTALS DE LA MECÀNICA CLÀSSICA

Ramon Lapiedra
Departament de Física Teòrica. Facultat de Ciències
Universitat de Santander.

Les tres famoses lleis de Newton, que hom enuncia com les lleis fonamentals de la mecànica clàssica dels sistemes de partícules, constitueixen de fet en la sevà formulació habitual una base no gaire adequada d'aquesta teoria, tot i que Newton sabé fer-ne un ús genial. Donem a continuació allò que, al nostre parer, són les cinc lleis fonamentals de la Mecánica Clàssica: la formulació general d'aquestes lleis és independent de quin grup –el de Galileu inhomogeni o el de Poincaré– hom triï com a grup d'invariància per a la teoria. Comparant després aquestes cinc lleis amb les tres lleis de Newton, posarem en relleu el contingut racional i alhora limitat d'aquestes respecte d'aquelles. Finalment recordarem algunes lleis mecàniques particulars i posarem en relació la "predictivitat" amb la teoria clàssica de camps i l'equació de Lorentz-Dirac i direm dues paraules sobre la natura del temps i de l'espai en Física.

Llei I. Principi de predictivitat [1]: per a un observador qualsevol i en notacions òbvies, les trajectòries d'un sistema de partícules en interacció són descrites a través del sistema d'equacions diferencials ordinàries

$$\frac{d^2\vec{r}_a}{dt^2} = \vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_c, t) \quad ; \qquad a, b, c = 1, 2, \ldots, N \tag{1}$$

N és el nombre de partícules del sistema.

En conseqüència, sota condicions de regularitat suficients per a les funcions $\vec{a}_a$, posicions i velocitats inicials determinen trajectòries úniques.

Certs capítols de la Física clàssica, com és ara els potencials retardats de l'Electrodinàmica o l'equació de Lorentz-Dirac, podrien fer-nos dubtar de la generalitat d'aquesta llei. Discutirem aquest punt més endavant.

Llei II. Per a una partícula aïllada i relativament a un observador, S_0, en repòs respecte a les estrelles fixes, hom té

$$\vec{a} = 0 \tag{2}$$

L'acceleració de la partícula és nul·la.

Aquesta llei presuposa l'existència de criteris operatius independents de (2) que permetin de decidir si una partícula donada està o no aïllada. Ací no entrarem en l'anàlisi d'aquests criteris, que donarem com a existents.

Corol·lari. Si tenim (2) respecte a S_0, trivialment tenim també (2) respecte a qualsevol sistema de referència, S, que es mogui amb velocitat uniforme respecte a S_0. És a dir, en la terminologia habitual, (2) és certa respecte a qualsevol observador d'inèrcia. Trivialment això val independenment de si el grup d'invariància de la teoria és el de Galileu inhomogeni o el de Poincaré. En realitat, tal i com hem dit al començament d'aquest escrit, tot el que es diu ací val per a tots dos grups si no hi ha menció explícita en sentit contrari.

Llei III. Conté dues afirmacions: llei III.a i llei III.b.

III.a. Sigui un sistema aïllat de dues partícules, **1** i **2**, en mútua interacció. Siguin a_{12} i a_{21} els mòduls de l'acceleració de la partícula **1** sotmesa a l'acció de la **2** i recíprocament per a a_{21}.

Aleshores la llei III.a estableix que el quocient a_{12}/a_{21} mesurat per un observador d'inèrcia, en un instant que les dues partícules estan en repòs respecte a ell, és constant: és a dir, no depèn de l'instant de temps considerat, no depèn de la distància que separi les partícules i no depèn de l'observador d'inèrcia que consideri l'experiència. Únicament depèn de les dues partícules considerades.

Escriurem

$$\left.\frac{a_{12}}{a_{21}}\right|_{v_1 = v_2 = 0} \equiv \left.\frac{a_{12}}{a_{21}}\right|_0 \equiv m_{21} \tag{3}$$

i direm que la constant m_{21} és la "massa" de la partícula **2** relativament a la **1**.

III.b. Siguin ara tres partícules **1**, 2 i **3**. Aleshores el quocient $\frac{m_{21}}{m_{31}}$ és independent de la partícula **1**.

Això permet, un cop triada la partícula **1**, patró, parlar de massa d'una partícula 2 sense cap altra referència, en el sentit que canviar el patró equival senzillament a multiplicar **totes** les masses m_{21}, m_{31}, . . ., etc., per un mateix factor d'escala. Així d'ara endavant parlarem de massa de la partícula 2, de la partícula **3**, etc. i escriurem: m_{21}, m_{31} . . .

Llei IV. Sigui el sistema de dues partícules de la llei III i sigui un sistema d'inèrcia, S, per al qual ambdues partícules estan en repòs en un mateix instant, **t**. Aleshores, en notacions evidents, la llei IV estableix que en S i a l'instant **t**(*)

$$m_1 \vec{a}_{12}\big|_0 = - m_2 \vec{a}_{21}\big|_0 \tag{4}$$

Amb la trivial definició de força $\vec{F}$, com a $\vec{F} \equiv m\vec{a}$, la relació (4) s'escriu en notacions evidents

$$\vec{F}_{12}\big|_0 = - \vec{F}_{21}\big|_0 \tag{5}$$

Llei V. Principi de relativitat: l'equació (1), relativa a un sistema aïllat de partícules en mútua interacció, és la mateixa per a tots els observadors d'inèrcia, és a dir tot i que els arguments t, $\vec{r}_a$, $\vec{v}_a$ passen a ésser en general t'_a, $\vec{r}'_a$, $\vec{v}'_a$, en canviar de sistema de referència, el sistema diferencial (1) es trasforma de manera que les noves funcions $\vec{a}'_a$ són les mateixes que les antigues: $\vec{a}'_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b, t) = \vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b, t)$. Això s'espressa dient que les equacions són invariants.

De fet des del començament hem suposat que les funcions acceleració, $\vec{a}_\alpha$, eren funcions 3-vectorials per tal de garantir la invariància del sistema (1) sota el subgrup de les rotacions d'espai.

Com han d'ésser doncs les funcions $\bar{a}_\alpha$ per tal que hi hagi invariància Galileu inhomogeni o Poincaré? Hi ha funcions d'aquesta mena? N'hi ha, efectivament.

Vegem primer el cas relatiu al grup de Galileu inhomogeni. Aquest grup actua sobre l'espai dels esdeveniments, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, d'acord amb les transformacions

---

(*) En realitat, allò que és privatiu d'aquesta llei és la relació que estableix entre les direccions i sentits de $\bar{a}_{12}$ i $\bar{a}_{21}$ car prenent mòduls en la relació vectorial (4) hom no obté altra cosa sinó la llei III.

$$(6) \quad \begin{cases} t \longrightarrow t' = t + t_0 \\ \vec{r}_a \longrightarrow \vec{r}_a{}' = \vec{r}_a + \vec{V} t + \vec{r}_0 \end{cases}$$

Ací donem les notacions per evidents.

La invariància d' (1) sota el subgrup de les translacions temporals implica necessàriament i suficientment

$$(7) \quad \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt'^2} = \vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b, t') = \vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b, t + t_0)$$

i com que trivialment és $\frac{d^2\vec{r}_a}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_a}{dt'^2}$ resulta

$$(8) \quad \vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b, t) = \vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b, t + t_0)$$

per a t_0 arbitrari, és a dir

$$(9) \quad \frac{\partial \vec{a}_a}{\partial t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}_a = \vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b)$$

Per al subgrup de les translacions d'espai tenim anàlogament

$$(10) \quad \vec{a}_a(\vec{r}_b + \vec{r}_0, \vec{v}_b) = \vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b)$$

per a tot $\vec{r}_0$, és a dir

$$(11) \quad \sum_{b=1}^{N}{}' \frac{\partial \vec{a}_a}{\partial \vec{r}_b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}_a = \vec{a}_a(\vec{r}_b - \vec{r}_c, \vec{v}_b)$$

Finalment, la invariància sota les transformacions de Galileu pures, hom pot veure d'una manera similar que implica

$$(12) \quad \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial \vec{a}_a}{\partial \vec{v}_b} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}_a = \vec{a}_a(\vec{r}_b - \vec{r}_c, \vec{v}_b - \vec{v}_c)$$

Les equacions (9), (11) i (12) són les condicions necessàries i suficients que han de complir les funcions 3-vectorials $\bar{a}_\alpha$ per tal que el sistema (1) sigui invariant sota el grup de Galileu inhomogeni. Aquestes condicions diuen respectivament que les acceleracions 3-vectorials d'(1) han d'ésser funcions independents del temps, depenent dels 3-vectors posició, $\vec{r}_b$, exclusivament a través de llurs diferències, $\vec{r}_b - \vec{r}_c$ i anàlogament pel que fa a la dependència amb les velocitats.

Parlem ara del cas en què el grup d'invariància és el de Poincaré. Els subgrups de les rotacions d'espai, translacions temporals i translacions d'espai donen respectivament el caràcter 3-vectorial de les acceleracions que hem suposat de bell antuvi, més les condicions (9) i (11) respectivament. Totes elles, és clar, condicions necessàries i suficients. Per contra, l'exigència de la invariància d'(1) sota les transformacions de Lorentz pures implica necessàriament i suficientment per a les funcions $\bar{a}_\alpha$ la condició d'ésser solucions d'un sistema acoblat d'equacions diferencials en derivades parcials [4] [5] [6]. Aquest sistema pren ara el lloc de la condició (12). Per al cas particular de dues partícules, s'escriu

$$(13)\quad r^j v_b^k \cdot \frac{\partial a_b^i}{\partial r^k} + (v_a^j v_a^k - \varepsilon_a \delta^{jk}) \frac{\partial a_b^i}{\partial v_a^k} - \eta_b r^j a_{b'}^k \frac{\partial a_b^i}{\partial v_{b'}^k} = 2 v_b^j a_b^i + v_b^i a_b^j$$

amb les notacions següents

$$(14)\qquad b' \neq b \quad ; i, j, k = 1, 2, 3 \; ; r^j \equiv (\vec{r})^j \; , \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \; ; \varepsilon_a = 1 \; , \; \eta_a \equiv (-1)^{a+1}$$

En (13) els índexs repetits **k** i **a** se sumen, però no els **b** i **b'**.

Observacions a la llei I. La confiança en la capacitat d'aquesta llei per a descriure efectivament, a nivell clàssic, les interaccions ha estat reforçada darrerament després de les investigacions dutes a terme en "Mecànica relativista predictiva" o Mecànica que accepta (1) més la invariància sota el grup de Poincaré. En particular, s'ha pogut demostrar [7] en un marc pertorbatiu que Mecànica relativista predictiva i interaccions clàssiques mediatitzades per camps clàssics són compatibles i que d'aquesta compatibilitat surt en cada cas una única interacció en Mecànica relativista predictiva.

D'altra banda una equació diferencial de 3$^{\text{er}}$ ordre com és l'equació de Lorentz-Dirac, sempre pot ésser vista com una equació diferencial ordinària de primer ordre per a l'acceleració en comptes de veure-la com una equació diferencial del moviment. Des d'aquest punt de vista, de les infinites acceleracions solució de l'equació de Lorentz-Dirac cal seleccionar l'única física, imposant les condicions de contorn escaients. Un cop trobada aquesta acceleració, podrem plantejar l'equació (1) corresponent. En un marc pertorbatiu, aquest programa ha estat dut a terme amb èxit [8].

Observacions a la llei IV. Quan les partícules són iguals (en particular $m_1 = m_2$), la llei IV tradueix una necessitat derivada immediatament de la simetria de la situació, car en aquest cas quelsevol altra relació entre $\vec{a}_{12}|_0$ i $\vec{a}_{21}|_0$ que no fos $\vec{a}_{12}|_0 = -\vec{a}_{21}|_0$ privilegiaria absurdament direccions o sentits d'un espai suposat homogeni i isòtrop. És per això que, en el cas que les acceleracions no depenguin de les velocitats (la qual cosa, per cert, és compatible amb la invariància Galileu, però no amb la invariància Poincaré, hom pot veure de seguida que les equacions diferencials (13) no admeten solucions físiques independents de les velocitats) s'ha de tenir per a partícules iguals

$$\vec{a}_{12} = -\vec{a}_{21} \tag{15}$$

independentment de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$. En el cas que $m_1 \neq m_2$ (15) hom generalitza com

$$m_1 \vec{a}_{12} = - m_2 \vec{a}_{21} \tag{16}$$

Les lleis de Newton. La 1ª llei de Newton coincideix amb la llei II. La 2ª llei de Newton pot quedar buida de contingut si no ens decidim a interpretar-la com una formulació implícita i fins i tot ambigua de la llei I. Si hom no dóna una definició de força (*) independentment de la relació $\vec{F} = m\vec{a}$, el molt famós enunciat que diu que "força = massa x acceleració" pot passar a no voler dir res. A més, si $\vec{F}$ no està definida independentment de $\vec{a}$, no es pot definir **m** com la constant de proporcionalitat entre $\vec{F}$ i **m**. Històricamente Newton va definir **m** segons la sorprenent tautologia **m** = densitat x volum.

(*) Aquesta definició no pot ésser d'una manera general allò que ha estat anomenat la "definició estàtica de força", per Coulomb i Cavendish en les seves històriques experiències. Com aplicar, per exemple, l'esmeltada definició de la "força" amb la qual el Sol atreu la Terra? Com ho faríem per tal de verificar en la pràctica que la llei de la força de Lorentz és certa amb aquella definició? Finalment, com caldria de formular la definició estàtica de força si tenim en compte la llei de contracció relativista de la longitud del dinamòmetre, i què restaria aleshores de la igualtat $\vec{F} = m\vec{a}$?

(**) Avui i en un context més ampli que el d'aquesta indagació, es tractaria més aviat de postular el lagrangià d'interacció. Això, però, no fa canviar gens la nostra argumentació.

Interpretant la 2ª llei de Newton des del punt de vista de la llei I guanyem una visió heurística de la Mecànica que històricament ha estat rendible. La recepta heurística podria restar reduïda a això: quan es cerqui a comprendre una nova interacció, tractarem de postular les funcions acceleració (**) $\vec{a}_a(\vec{r}_b, \vec{v}_b)$ corresponents. Intentar de postular directament les trajectòries $\vec{r}_a = \vec{r}_a$ (t, condicions inicials), o bé $\vec{v}_a = \vec{v}_a$(t, condicions inicials), és sense esperança (pensem només què suposaria això per a un problema tan simple com el de Kepler), i si alternativament buscàvem una funció com és ara $\vec{v}_a = \vec{v}_a(\vec{r}_b, t)$, aquesta funció sabem que no existeix. Per contra, amb la recepta heurística esmentada, trobaren Galileu i Newton, el camp gravitatori uniforme terrestre i la llei de la gravitació universal, respectivament.

Quant a la 3ª llei de Newton, és inclosa en la llei IV. Aquesta més l'apartat "Observacions a la llei IV" mostren amb exactitud les raons i les limitacions de la 3ª llei de Newton.

Lleis particulars. Mencionem a continuació algunes lleis de la Mecànica més o menys remarcables, sense la generalitat, però, de les ja enunciades cinc lleis fonamentals.

A) Llei de composició de les acceleracions: si en presència solament de la partícula 2, l'acceleració de la partícula **1** és $\bar{a}_{12}$ i $\bar{a}_{13}$, en presència d'únicament la **3**, quan **2** i **3** hi són presents simultàniament, la nova acceleració $\bar{a}_1$ és tal que

$$(17) \qquad \vec{a}_1 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_{13}$$

Aquesta llei és vàlida únicament en el marc galileà. Quan s'imposa la invariància Poincaré, deixa necessàriament d'ésser vàlida; en efecte, unes equacions com les (13) no són lineals respecte a les acceleracions.

B) Llei de la igualtat de les masses inerta i pesant: aquesta llei, tot i essent tan important, manca en l'esquema present de la generalitat de què gaudeixen les cinc fonamentals, puix que concerneix un tipus d'interacció específica: la interacció gravitatòria.

C) Dependències específiques en les masses de les acceleracions: Si dues partícules **1** i **2** interaccionen coulombianament, les acceleracions $\vec{a}_{12}$ i $\vec{a}_{21}$ són proporcionals a $\frac{1}{m_1}$ i $\frac{1}{m_2}$ respectivament. En el cas d'interacció gravitatòria newtoniana, $\vec{a}_{12}$ és proporcional a m_2 i $\vec{a}_{21}$ a m_1.

En general les funcions $\vec{a}_\alpha$ d'(1) dependran de les masses (així com d'altres possibles paràmetres característics). La dependència, però, no serà en general tan simple com en els dos casos esmentats.

L'espai i el temps en la mecànica clàssica. Les fórmules, fonamentals o no, de la mecànica clàssica fan aparèixer pertot arreu les magnituds d'espai, $\vec{r}$ i de temps, **t**. El significat d'aquestes nocions no pot ésser donat per les esmentades fórmules, ans al contrari necessitem unes definicions "operatives" prèvies de $\vec{r}$ i **t** per tal que aquelles cobrin sentit.

L'interval de temps, Δt, que dura un procés o que hi ha entre dos esdeveniments es defineix en física mitjançant un rellotge. Aquest instrument és en principi qualsevol fenomen periòdic. El nombre de períodes o fracció que transcorre entre ambdós esdeveniments és per definició Δt, mesurat per aquest rellotge. Evidentment, des del moment que hem triat un determinat fenomen periòdic com a rellotge, el seu període és constant per definició. En la natura hi ha certs rellotges (certs fenòmens periòdics) que permeten una descripció del món més senzilla que d'altres. Així, agafant la rotació de la Terra al voltant del Sol com a rellotge, multitud de fenòmens fonamentals de la micro- i macro-física apareixen tenint duracions fonamentalment constants.

En aquest respecte, agafar com a rellotge un pèndul amb un fregament notori conduiria a una descripció del món innecessàriament complicada: el pèndul oscil·laria amb període constant, mentre que la ratlla groga **D** del sodi, per exemple, tindria una freqüència que variaria ostensiblement amb el temps.

Per a la noció de distància entre dos punts tenim igualment definicions operatives a través de barres rígides (*) o del mesurament del temps que tarda un raig de llum per a anar d'un punt a l'altre a través del buit. En el marc de la mecànica clàssica, tots dos procediments donen els mateixos resultats mentre hom no surt del domini (més restringit) on es pot aplicar la 1ª definició.

Entre aquestes nocions operatives d'espai i temps i la nostra sensibilitat interna, hi ha correlacions estables. Així, quan experimentem amb una necessitat subjectiva total que una distància és més petita que una altra, el nombre que expressa la mesura de la primera resulta més petit que el que expressa la mesura de la segona. Encara hi ha d'altres correlacions de natura semblant entre la nostra sensibilitat interna espacial-temporal i l'espai i temps de la Física.

El marc de validesa d'aquestes correlacions acaba allà on les nostres sensacions de més lluny o més a prop, més gran o més petit, abans o després, etc., comencen a fer-se més o menys dubtoses i opinables. Però, allò que és més radical: aquestes correlacions són absolutament inexistents per força en el domini on manquem d'experiència subjectiva: aquest és el cas

(*) Això suposa l'existència de criteris previs que permetin de caracteritzar una barra donada com a rígida.

de distàncies molt petites o molt grans, o de la simultaneïtat de dos esdeveniments molt allunyats, etc.

La conseqüència banal de tot això és que les fórmules de la mecànica corroboraran la nostra experiència qualitativa diària, però de fet elles i llurs conseqüències cobreixen un món més vast, que comprèn aquest món quotidià: el món de les definicions operatives de distància i durada. Fóra poc raonable –i l'experiència en Física s'encarrega de testimoniar-ho– de suposar que les propietats que valen per a les nostres sensacions immediates de temps i d'espai valen necessàriament per a les nocions físiques corresponents allà on manquem de tota experiència subjectiva. Així, per exemple, al nostre món quotidià dos esdeveniments simultanis per a un observador ho són també per a qualsevol altre. Sabem, però, que aquest no és el cas a l'espai de Minkowski, el qual és l'entitat que regula les mesures físiques d'espai i temps en Relativitat.

Consideració final. Essencialment, allò que diem en aquest escrit ja ha estat dit abans per uns o altres implícitament o explícitament, de manera que la bibliografia citada no recull (ni de bon tros!) els autors que hagin pogut parlar del tema en termes semblants. Encara menys hem pretès de respectar cap mena de preeminència cronològico-històrica en les poques referències de caràcter general donades, car l'autor no és cap especialista en Història de la Física. Esperem, tanmateix, que el fet d'haver donat ací en una forma compacta aquest punt de vista sobre els fonaments de la Mecànica Clàssica, pugui servir perquè en les nostres Facultats, al moment d'explicar la lliçó "inevitable" dels principis de la Mecànica, hom digui quelcom més que les quatre frases de sempre per a sortir del pas, mentre hom passa alleujat a ocupar-se seguidament de temes considerats més substanciosos.

Diguem també que la majoria dels llibres avui al nostre abast sobre Mecànica Clàssica, àdhuc aquells força encomiables, són incomplets en tractar d'aquest tema.

AGRAÏMENT

És un plaer de poder agrair ací al prof. E. Santos diverses crítiques i observacions sobre el tema.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Poincaré en "La Ciencia y la Hipótesis" enuncia ocasionalment aquest principi, i segurament que d'altres autors també el deuen haver esmentat. Tot i això, pensem que fins molt recentment no ha estat enunciat d'aquesta manera enfàtica en la qual nosaltres ho fem ací: V. Arnold, "Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique", Mir. Moscou 1976, i L. Bel, "Mecànica relativista predictiva. Curs explicat al Dpment. de Física Teòrica de la Universitat Autònoma de Barcelona". UAB, FT-34, Juny 77.

[2] E. Mack, "The Science of Mechanics". Open Court, La Salle, Illinois 1942.

[3] R.B. Lindsay, H. Morgenau. "Foundations of Physics". Dover 1957.

[4] D.G. Currie, *Phys. Rev. 142,* 817 (1966).

[5] R.N. Hill *J. Math. Phys. 8,* 201 (1967).

[6] L. Bel., *Ann. Inst. H. Poincaré, 3,* 307 (1970).

[7] Vegeu L. Bel, X. Fustero, *Ann. Inst. Henri Poincaré, 25,* 411 (1976) i les referències allí citades.

[8] R. Lapiedra, A. Molina, "Classical predictive Electrodynamics of two charges with radiation: general framework (I)" i R. Lapiedra, F. Marqués, A. Molina, "Classical predictive Electrodynamics of two charges with radiation: scattering cross-sections (II)". Hom en preveu l'aparició dins J. of Math. Phys., durant l'any 1979.